5-11-14

Παράδειγμα: Να γίνουν τρείς επαναλήψεις με $x^{(0)}=0$ των μεθόδων Jacobi και Gauss-Seidel για την προσέγγιση της λύσης του γραμμ. συστήμ.

$$2x_1 - x_2 = 1$$
$$-x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$
$$-x_2 + 2x_3 = 0$$

Jacobi

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right] \quad m=0,1,2,\ldots$$

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m)}\right]$$
$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[x_1^{(m)} + x_3^{(m)}\right], \quad m=0,1,2,\ldots$$
$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m)}\right]$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad x^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 3/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$$

Gauss-Seidel

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}} \cdot \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(m)} \right]$$

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 5/8 \end{pmatrix}$$

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 - x_2^{(m)}\right]$$
$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[x_1^{(m+1)} + x_3^{(m)}\right].$$
$$x_3^{(m+1)} = \frac{1}{2}\left[1 + x_2^{(m+1)}\right].$$

$$x^{(2)} = \begin{pmatrix} 5/8 \\ 5/8 \\ 13/16 \end{pmatrix}, \quad x^{(3)} = \begin{pmatrix} 13/16 \\ 13/16 \\ 29/32 \end{pmatrix}$$

Ακριβής λύση: $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Θεωρούμε τη διάσπαση $A=D-L-U$ όπου $D=diag(a_{11}\ a_{22} \dots a_{nn})$

$$L=\begin{bmatrix} 0 & & & \\ -a_{21} & 0 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\ -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ & 0 & \cdots & -a_{2n} \\ & & \ddots & -a_{n-1,n} \\ & & & 0 \end{bmatrix}$$

Jacobi (τύπος)

$$Dx^{(m+1)} = (L+U)x^{(m)} + b$$

$$x^{(m+1)} = D^{-1}(L+U)x^{(m)} + D^{-1}b.$$

Gauss-Seidel (τύπος)

$$(D-L)x^{(m+1)} = Ux^{(m)} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = (D-L)^{-1}Ux^{(m)} + (D-L)^{-1}b, \ m=0,1,2 \dots$$

Παρατηρούμε ότι οι μέθοδοι αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις μιας κατηγορίας μεθόδων. Θεωρούμε το διαχωρισμό $A=M-N$ που παράγει την επαν. μέθοδο.

$$Mx^{(m+1)} = Nx^{(m)} + b \Leftrightarrow x^{(m+1)} = M^{-1}Nx^{(m)} + M^{-1}b \Leftrightarrow$$

$$x^{(m+1)} = Gx^{(m)} + c, \ m=0,1,2, \dots$$

G: επαναληπτικός πίνακας.

Jacobi

$M_J = D$, $N_J = L+U$, $G_J = D^{-1}(L+U)$

Gauss-Seidel

$M_{GS} = D-L$, $N_{GS} = U$, $G_{GS} = (D-L)^{-1}U$.

$$Ax=b \Leftrightarrow x = Gx + c$$

$$\varepsilon^{(m+1)} = (x^{(m+1)} - x) = G(x^{(m)} - x) = G\varepsilon^{(m)}, \ m=0,1,2 \dots$$

$$\varepsilon^{(m)} = G^m \varepsilon^{(0)}, \ \varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

Αν θεωρήσω μια νόρμα $\|\cdot\|$ τότε: $\|\varepsilon^{(m)}\| = \|G^m \varepsilon^{(0)}\| \le \|G^m\|\cdot\|\varepsilon^{(0)}\|$

$$\lim_{m\to\infty} \|\varepsilon^{(m)}\| \le \lim_{m\to\infty} \|G^m\|\cdot\|\varepsilon^{(0)}\| = 0 \ \forall \varepsilon^{(0)} \in \mathbb{R}^n.$$

$$\Longrightarrow \lim_{m\to\infty} \|G^m\| = 0$$

Θεώρημα: Έστω x είναι η λύση του συστήματος $Ax=b$.
Τότε οι παρακάτω προτάσεις είναι ισοδύναμες:

α) Η ακολουθία διανυσμάτων της επαν. μεθόδου που παράγεται από το διαχωρισμό $A=M-N$ συγκλίνει στη λύση x.

β) $\rho(G)<1$, όπου $G=M^{-1}N$

γ) Υπάρχει φυσική νόρμα $\|\cdot\|$ τέτοια ώστε $\|G\|<1$

δ) $\lim_{n\to\infty} G^m=0$.

$$A=\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D=\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad L=\begin{bmatrix} 0 & & \\ 1 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad U=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ & 0 & 1 \\ & & 0 \end{bmatrix}$$

$$G_J=D^{-1}(L+U)=\begin{bmatrix} 1/2 & & \\ & 1/2 & \\ & & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

$\|G\|_1=\|G\|_\infty=1$ __δεν μπορούμε να αποφανθούμε.__

$$\det(G_J-\lambda I)=\begin{vmatrix} -\lambda & 1/2 & 0 \\ 1/2 & -\lambda & 1/2 \\ 0 & 1/2 & -\lambda \end{vmatrix}=-\lambda^3+\frac{1}{4}\lambda+\frac{1}{4}\lambda=\lambda\left(\lambda^2-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ \lambda_3=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \rho(G_J)=\frac{\sqrt{2}}{2}<1$$

Processed by FREE version of STOIK
Mobile Doc Scanner from www.stoik.com